

# MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS: UMA ABORDAGEM PRÁTICA E APLICAÇÃO EM PROBLEMAS DE DIFUSÃO TÉRMICA COM MATLAB®

Elierton Evangelista Neves<sup>1</sup>, Yuri Shalom de Freitas Bezerra<sup>2</sup>

**RESUMO:** O objetivo deste trabalho é descrever de forma prática com uma abordagem linear os aspectos essenciais do método dos volumes finitos (MVF). Na introdução foi dada uma visão geral do MVF, ressaltando aspectos referentes à identificação do domínio de interesse e dos tipos de malhas geradas na discretização, e aplicação do método MVF no problema de difusão de calor unidimensional. Na segunda parte deste trabalho buscou-se a aplicação no problema de difusão de calor bidimensional em uma placa plana de aço carbono ASTM A-36, submetida a temperaturas prescritas em distintas fronteiras. Na terceira parte é feita a apresentação dos resultados da distribuição das temperaturas na placa metálica nos tempos de 0, 20, 100 e 300 segundos de exposição às condições de contorno impostas. É importante ressaltar que os resultados obtidos neste trabalho devem ser visto como uma primeira aproximação da acuracidade do MVF e servem como referência aplicações futuras do mesmo. O código computacional elaborado em Matlab®, no Apêndice A, implementa o método dos volumes finitos (MVF) e solução do sistema de equações pelo algoritmo de Thomas também conhecido como TDMA.

**Palavras-chave:** Método dos Volumes Finitos. Transmissão de Calor. Matlab®.

**ABSTRACT:** The objective of this paper is to describe a practical approach with a linear key aspects of the finite volume method (FVM). In the introduction was given an overview of the MVF, highlighting aspects related to the identification of the domain of interest and types of meshes generated in the discretization, and the application of MVF in one-dimensional heat diffusion problem. In the second part of this study we sought to apply the heat diffusion problem in a two-dimensional flat plate carbon steel ASTM A-36 subject to prescribed temperatures in different boundaries. The third part is made a presentation of the results of the temperature distribution in the metal plate in the times 0, 20, 100 and 300 seconds of exposure to the boundary conditions imposed. Importantly, the results obtained in this work should be seen as a first approximation of the accuracy of the MVF and serve as reference for future applications of the same. The computer code developed in Matlab®, in Appendix A, implements the finite volume method (FVM) and the system of equations is solved by Thomas algorithm also known as TDMA.

**Keywords:** Finite Volume Method. Heat Transfer. Matlab®.

## 1 INTRODUÇÃO

O Método dos Volumes Finitos (MVF) tem sido largamente utilizado nas mais diversas áreas do conhecimento científico nas últimas décadas, é precipitado o pensamento em que esta técnica se limita apenas às áreas de engenharia, podemos citar dentre os seus principais usos aplicações que vão desde áreas de saúde até a aeroespacial.

É vasta a literatura que trata deste assunto, porquanto este artigo não tem a pretensão de reproduzir as deduções do desenvolvimento do MVF precisamente tratado em Patankar (1980), mas sim buscar facilitar aos iniciantes no MVF, o entendimento da elaboração de

---

<sup>1</sup> Doutorando em Engenharia Mecânica-UFRN, Mestre em Ciências Térmicas- UFRN, Graduado em Engenharia Mecânica- UFRN. Contato: [elierton@ufrnet.com.br](mailto:elierton@ufrnet.com.br)

<sup>2</sup> Mestrando em Engenharia Mecânica- UFRN, Graduado em Física- UFRN. Contato: [yurishalom@gmail.com](mailto:yurishalom@gmail.com).

códigos computacionais de aplicação do MVF com o auxílio da ferramenta Matlab<sup>®</sup> através de um exemplo prático.

Uma definição simplificada para o MVF é “um método de solução de equações diferenciais parciais na forma de equações algébricas” (LEVEQUE, 2000). Derivado do Método dos Elementos Finitos (MEF), também faz uso de pequenos elementos, os quais menores possíveis, resultam em melhores aproximações dos resultados quando comparados aos valores obtidos por uma solução exata das equações de governo do fenômeno físico investigado.

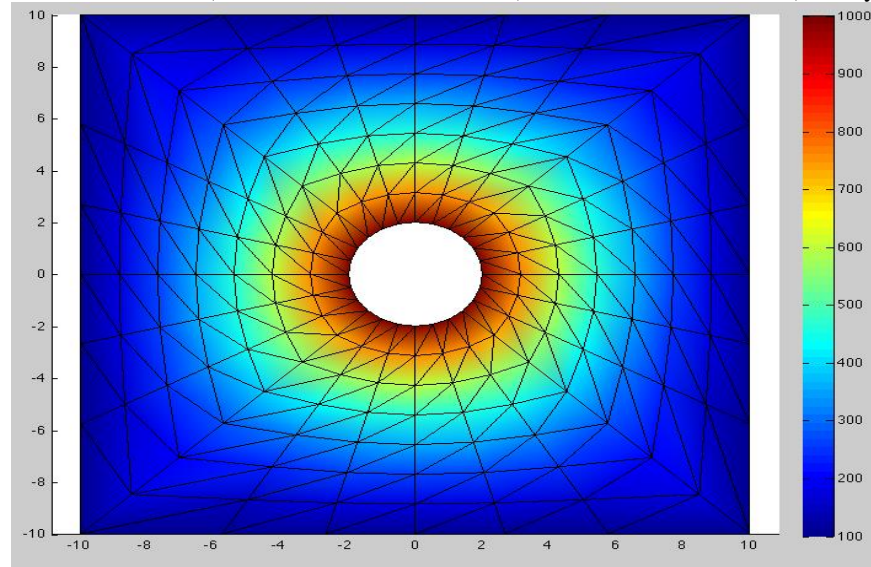
O procedimento básico de aplicação do método dos volumes finitos pode ser descrito pelos seguintes passos:

- 1 – Identificar o domínio ou limites da região que acontece o fenômeno investigado;
- 2 – Dividir ou discretizar o domínio avaliado em pequenas partes ou volumes localizando no centróide de cada volume o variável que será calculada;
- 3 – Integrar a equação diferencial de governo em cada volume agora chamado de volume de controle;
- 4 – Aplicação do método numérico na solução de um problema unidimensional (1-D) de transferência de calor.

## 1.1 IDENTIFICAÇÃO DO DOMÍNIO DE SIMULAÇÃO

A identificação do domínio de simulação para o caso de problemas de condução e difusão de calor é relativamente mais simples que para os casos de problemas de escoamento de fluidos. O domínio de simulação em problemas de condução de calor deve ser entendido como sendo os limites dimensionais físicos do sólido que se deseja investigar a distribuição das temperaturas e fluxos de calor, a exemplo podemos visualizar através da figura-01, típico domínio bidimensional (2-D).

**Figura 01** – Domínio 2-D ( $-10 < X < 10$  e  $-10 < Y < 10$ ) excluindo a área circular ( $x^2+y^2 < R^2$ )



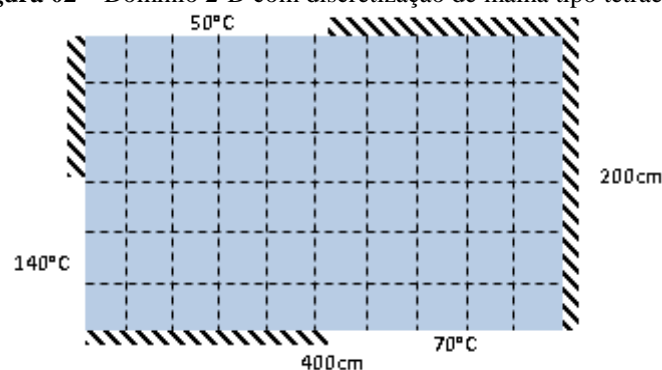
Fonte: [http://tetrisrockstar.com/wp-content/uploads/2010/04/disc\\_336\\_solved.png](http://tetrisrockstar.com/wp-content/uploads/2010/04/disc_336_solved.png)

Pode-se identificar facilmente que o cálculo das temperaturas neste domínio ocorrerá para os valores de  $X$  que vão de  $-10$  até  $+10$  e para valores de  $Y$  que vão de  $-10$  até  $+10$ , no entanto a área circular deverá ser excluída do cálculo, ou seja, todo e qualquer valor de  $X$  e  $Y$  que satisfaçam a inequação  $(X^2+Y^2) > R^2$ , sendo  $R$  o valor do raio da área circular.

## 1.2 DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO DE SIMULAÇÃO

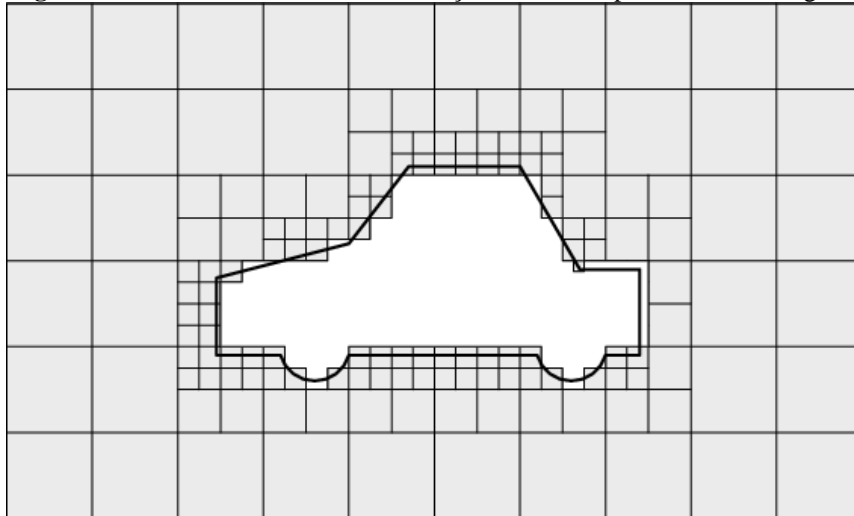
A discretização do domínio a ser simulado pode ser entendida como sendo a divisão da área total de interesse em pequenos elementos de área, esses elementos podem ter diferentes formas geométricas, sendo os mais usuais elementos triangulares, elementos tetraédricos. A figura-02 representa o domínio discretizado da aplicação do MFV que será tratado neste trabalho, neste exemplo a malha 2-D gerada é do tipo tetraédrica regular.

**Figura 02** – Domínio 2-D com discretização de malha tipo tetraédrica regular.



Fonte: Disponível em: <http://freefoam.sourceforge.net/doc/UserGuide/ch05s04.html>

**Figura 03** – Domínio 2-D com discretização de malha tipo tetraédrica irregular



**Fonte:** Disponível em: <http://freefoam.sourceforge.net/doc/UserGuide/ch05s04.html>

As malhas triangular e tetraédricas, respectivamente, apresentadas nas figura-01 e figura-03 são malhas ditas irregulares, uma vez que há uma variação do tamanho do elemento da malha de dscretização ao longo do domínio simulado.

### 1.3 INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE GOVERNO

O processo de integração deve ser feito aplicando os limites do domínio da região simulada em cada termo da equação de governo, assim como os limites de tempo para o caso de regime de simulação transiente. A aplicação destes limites aos integradores da equação de governo pode ser escrita conforme a equação 01.

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{y=0}^{y=H} \int_{x=0}^{x=L} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx.dy = \int_t^{t+\Delta t} \int_{y=0}^{y=H} \int_{x=0}^{x=L} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S \right] dx.dy \quad (1)$$

Os limites usados nos integradores do domínio espacial  $x=0$  até  $x=L$  e  $y=0$  e  $y=H$ , referem-se a uma geometria retangular com dimensões  $L \times H$ .

O resultado destes passos nos leva a equação discretizada que avalia nossa variável em todo o domínio investigado a formulação detalhada deste processo pode ser visto em (MALISKA, 2010).

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + a_s T_s + a_n T_n + b \quad (2)$$

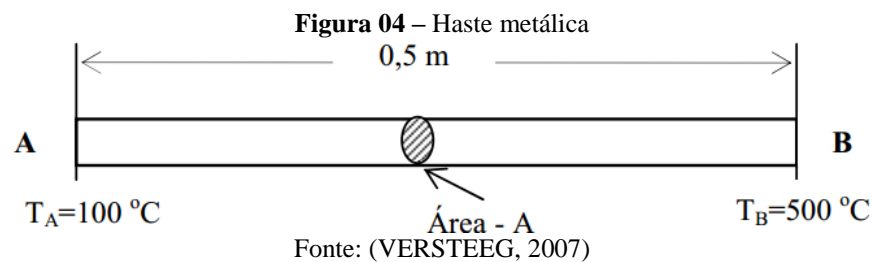
### 1.4 EXEMPLO: DIFUSÃO DO CALOR 1-D PERMANENTE

Este item é uma tradução livre do (VERSTEEG, 2007) página 118 do livro.

Considere o problema de condução de calor permanente sem fontes de energia em uma haste metálica cujas extremidades são mantidas às temperaturas de 100°C e 500°C, respectivamente como na figura-04. A equação que governa o fenômeno é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (3)$$

A condutividade térmica do material da vareta é  $k = 1000 \text{ W/m.K}$  e a área da seção transversal é  $A = 10 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ .



Dividindo o comprimento da haste em cinco volumes de controle iguais, temos um domínio como mostrado na figura-05 abaixo. Sendo  $\delta x = 0,1 \text{ m}$ .



A malha é constituída por cinco nós. Para cada um dos nós 2, 3 e 4, os valores da temperatura para o leste e oeste estão disponíveis como valores nodais. Consequentemente, uma equação discretizada como a logo abaixo pode ser facilmente escritos para o volume de controle em torno desses nós:

$$\left( \frac{k}{(\delta x)_E} A_E + \frac{k}{(\delta x)_W} A_W \right) T_P = \left( \frac{k}{(\delta x)_W} A_W \right) T_W + \left( \frac{k}{(\delta x)_E} A_E \right) T_E \quad (4)$$

O espaçamento entre os nós  $\delta x$  e a área da seção transversal ( $A_E = A_W = A$ ) são constantes. Portanto, a equação discretizada para os pontos 2, 3 e 4 é:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E \quad (5)$$

com

$$a_w = \frac{k}{\delta x} A, a_E = \frac{k}{\delta x} A \text{ e } a_P = a_w + a_E$$

$S_u$  e  $S_P$  são iguais a zero, neste caso, já que não há termo fonte na equação governante. Os nós 1 e 5 são nós de fronteira e, portanto, requerem atenção especial. Integrando a equação de governo ao longo do volume de controle e entorno do ponto 1, temos:

$$kA \left( \frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - kA \left( \frac{T_P - T_A}{\delta x / 2} \right) = 0 \quad (6)$$

Esta expressão mostra que o fluxo através do volume de controle no limite do ponto A foi aproximado assumindo uma relação linear entre as temperaturas no ponto de fronteira A e nó P. Podemos rearranjar a última equação como segue:

$$\left( \frac{k}{\delta x} A + \frac{2k}{\delta x} A \right) T_P = 0 \cdot T_w + \left( \frac{k}{\delta x} A \right) T_w + \left( \frac{2k}{\delta x} A \right) T_A \quad (7)$$

Analisando a equação anterior, pode se identificado que a condição de contorno da temperatura prescrita entra no cálculo como uma fonte ( $S_u + S_P T_P$ ) com  $S_u = (2kA/\delta x) T_A$  e  $S_P = -(2kA/\delta x)$ , e que a ligação para o lado oeste da condição de contorno é suprimida ajustando o coeficiente  $A_w = 0$ .

A equação anterior pode ser colocada numa forma que já conhecemos para obter a equação discretizada para o nó da fronteira 1:

$$a_P T_P = a_w T_w + a_E T_E + S_P \quad (8)$$

com

$$a_w = 0, a_E = \frac{k}{\delta x} A, a_P = a_w + a_E - S_P, S_P = -\frac{2k}{\delta x} A \text{ e } S_u = -\frac{2kA}{\delta x} T_A$$

O volume de controle em torno do nó 5 pode ser tratado de uma maneira semelhante. Sua equação discretizada é dada pela:

$$kA \left( \frac{T_B - T_P}{\delta x / 2} \right) - kA \left( \frac{T_P - T_w}{\delta x} \right) = 0 \quad (9)$$

A equação discretizada para o nó da fronteira 5:

$$a_P T_P = a_w T_w + a_E T_E + S_P$$

com

$$a_W = \frac{k}{\delta x} A, a_E = 0, a_P = a_W + a_E - S_P, S_P = -\frac{2k}{\delta x} A \text{ e } S_u = -\frac{2kA}{\delta x} T_B$$

O processo de discretização produziu uma equação para cada um dos pontos nodais, de 1 a 5. A substituição de valores numéricos das constantes  $kA/\delta x = 100$ , e os coeficientes de cada equação discretizada podem ser facilmente resolvidos. Seus valores são apresentados na tabela-01 a seguir:

**Tabela 01** – Coeficientes da equação discretizada.

<i>Node</i>	$a_W$	$a_E$	$S_u$	$S_P$	$a_P = a_W + a_E - S_P$
1	0	100	$200T_A$	-200	300
2	100	100	0	0	200
3	100	100	0	0	200
4	100	100	0	0	200
5	100	0	$200T_B$	-200	300

Fonte: (VERSTEEG, 2007)

O conjunto resultante das equações algébricas para este exemplo é:

$$300T_1 = 100T_2 + 200T_A$$

$$200T_2 = 100T_1 + 100T_3$$

$$200T_3 = 100T_2 + 100T_4$$

$$200T_4 = 100T_3 + 100T_5$$

$$300T_5 = 100T_4 + 200T_B$$

Este conjunto de equações pode ser rearranjado na forma matricial como:

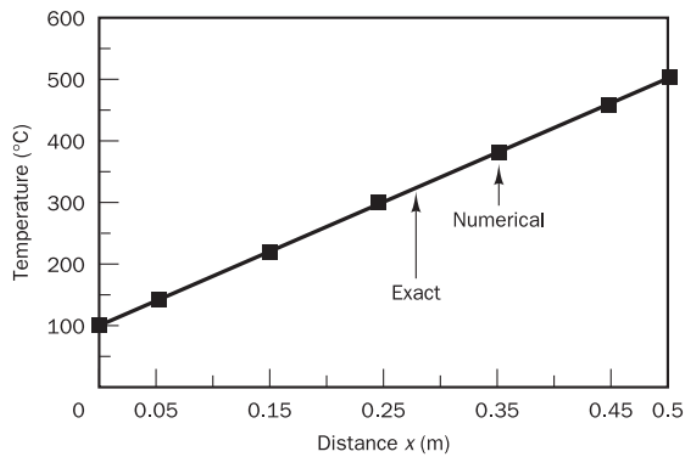
$$\begin{bmatrix} +300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & +200 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & +200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & +200 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & +300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200T_B \end{bmatrix}$$

O conjunto de equações acima produz a distribuição de temperatura permanente de uma dada situação. Para problemas simples envolvendo um pequeno número de nós a equação da matriz resultante pode ser facilmente resolvida com um software tal como o MATLAB<sup>®</sup> (qualquer versão). Para  $T_A = 100^\circ\text{C}$  e  $T_B = 500^\circ\text{C}$  a solução do sistema acima pode ser obtida usando, por exemplo, a eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{bmatrix}$$

A solução exata é uma distribuição linear entre o limite especificado das temperaturas:  $T = 800x + 100$ . A figura-06 abaixo mostra que a solução exata e os resultados numéricos são coincidentes.

**Figura 06** – Comparação entre as soluções analítica e numérica.

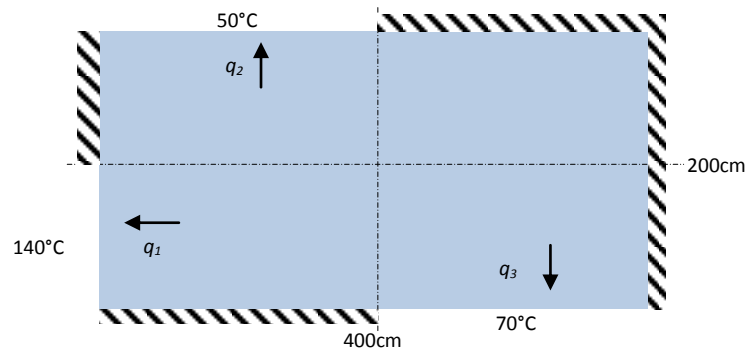


**Fonte:** (VERSTEEG, 2007)

## 2 - APLICAÇÃO DO MVF – TRANSMISSÃO DE CALOR

A seguir vamos desenvolver um código computacional para determinar o perfil de distribuição de temperatura ao longo de uma placa plana retangular de aço carbono com espessura de 1 cm conforme ilustrado na figura-07.

**Figura 07** – Placa de aço carbono retangular 200x400



**Fonte:** Próprio autor



Os dados físicos do material ASTM A-36 estão apresentados no quadro 01.

**Quadro 01** – Dados físicos do material da placa retangular.

Aço Carbono ASTM A-36	
Propriedade	Valor
- Volume específico $\rho$ ( $kg/m^3$ )	7.860
- Calor específico do aço $c_p$ ( $kcal/kg.^{\circ}C$ )	486
- Condutividade térmica do aço $k$ ( $kcal/m.h.^{\circ}C$ )	52,9

Fonte: ÖZISIK

A equação diferencial parcial de governo para a transferência de calor bidimensional transiente com termo fonte (S) ao longo da placa pode ser descrita de acordo com a equação-10.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S \quad (10)$$

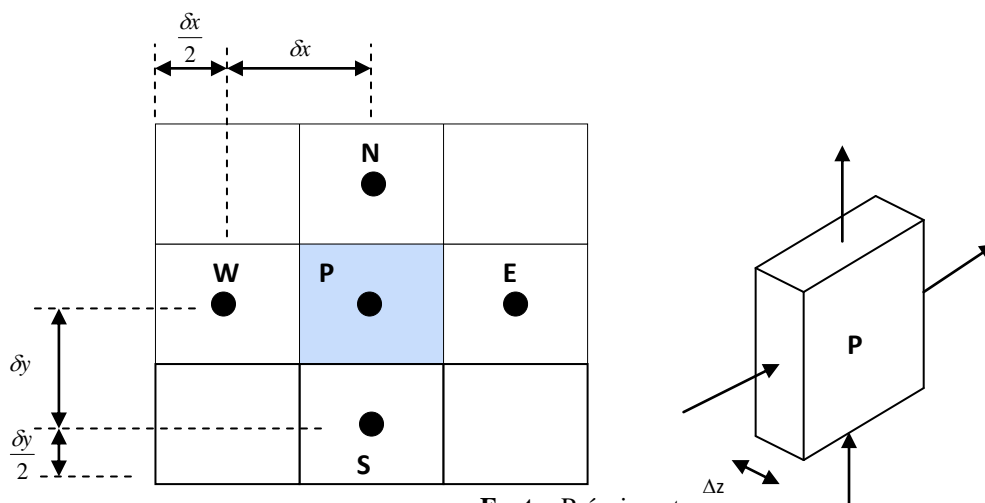
A integração no tempo e no espaço bidimensional segundo o domínio indicado resulta depois de rearranjados os termos, na equação discretizada na forma:

$$\int_{t_o}^{t+\Delta t} \int_{VC} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx.dy = \int_{t_o}^{t+\Delta t} \int_{VC} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S \right] dx.dy$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b \quad (11)$$

Os índices subscritos da equação discretizada indicam a localização dos volumes circunvizinhos que mantêm influência sobre um volume P, como ilustrado pela figura-08.

**Figura 08** – Esquema de discretização dos volumes com  $\delta x = \delta y$  e  $\delta z = 1$ cm.



Onde, os coeficientes  $a_{nb}$  de transporte da propriedade, neste caso a temperatura podem ser determinados por:

$$a_W = \frac{k\delta y\delta z}{(\delta x)_W} \quad (12)$$

$$a_E = \frac{k\delta y\delta z}{(\delta x)_E} \quad (13)$$

$$a_S = \frac{k\delta y\delta z}{(\delta x)_S} \quad (14)$$

$$a_N = \frac{k\delta y\delta z}{(\delta x)_N} \quad (15)$$

$$b = S_u\delta x\delta y\delta z + a_p^o T_p^o \quad (\text{Termo Fonte}) \quad (16)$$

$$a_p^o = \frac{\rho c \delta x \delta y \delta z}{\delta t} \quad (17)$$

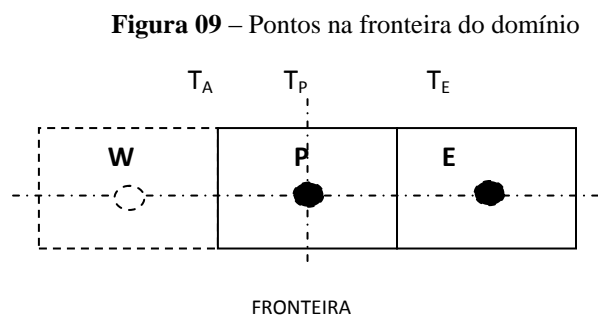
$$a_p = a_W + a_E + a_S + a_N + a_p^o - S_p\delta x\delta y\delta z \quad (18)$$

O termo com índices subscritos  $a_p^o T_p^o$ , refere-se à energia interna contida no volume de controle dividido por  $\delta t$  no passo de tempo  $t$ . Os termos  $S_u$  e  $S_p$  são componentes da linearização do termo fonte quando for associado ao problema. Uma formulação detalhada para esses termos pode ser conferida em (VERSTEEG, 2007).

## 2.1 COMPONENTES $S_U$ E $S_P$ DO TERMO FONTE

O termo fonte ( $b$ ) pode ser facilmente linearizado, tendo como a condição de contorno uma temperatura prescrita, desta forma podemos usar o procedimento a seguir.

Aplicando um balanço de energia no nó de fronteira (ponto P) mostrado na figura-09, chegamos à seguinte expressão:



Deve-se notar que a temperatura  $T_A$  refere-se à temperatura na fronteira e o coeficiente  $a_W = 0$ , o nó W não existe.

$$\frac{k \cdot \partial y \cdot \partial z (T_P - T_A)}{\delta x / 2} - \frac{k \cdot \partial y \cdot \partial z (T_E - T_P)}{\delta x} - \frac{k \cdot \partial y \cdot \partial z (T_N - T_P)}{\delta y} - \frac{k \cdot \partial y \cdot \partial z (T_S - T_P)}{\delta y} = 0 \quad (19)$$

após rearranjo e com  $\delta x = \delta y$ , obtemos a forma:

$$\left( \frac{2k \partial y \cdot \partial z}{\delta x} + \frac{k \partial y \cdot \partial z}{\delta x} + \frac{k \partial y \cdot \partial z}{\delta x} + \frac{k \partial y \cdot \partial z}{\delta x} \right) T_P = 0 T_W + \frac{k \partial y \cdot \partial z}{\delta x} T_E + \frac{k \partial y \cdot \partial z}{\delta x} T_N + \frac{k \partial y \cdot \partial z}{\delta x} T_S + \frac{2k \partial y \cdot \partial z}{\delta x} T_A \quad (20)$$

Onde,

$$a_P = a_W + a_E + a_N + a_S - S_P \quad (21)$$

Comparando com as equações (11) e (20), podemos identificar facilmente que:

$$S_u = \frac{2 \cdot k \cdot \partial y \cdot \partial z}{\delta x} T_A, \text{ e} \quad (22)$$

$$S_p = -\frac{2 \cdot k \cdot \partial y \cdot \partial z}{\delta x} \quad (23)$$

## 2.2 APLICAÇÃO DO ALGORITMO DE THOMAS

Muito se conhece a aplicação do algoritmo de Thomas para solução de problemas 1-D, para a solução de nosso problema bidimensional (2-D), faremos uso do seguinte artifício:

Deveremos escolher o sentido varredura para solução linha a linha, para o caso de uma varredura horizontal, devemos reescrever a equação-11, na forma:

$$-a_W T_W + a_P T_P - a_E T_E = a_N T_N + a_S T_S + b \quad (24)$$

Caso a opção fosse por uma varredura vertical, teríamos:

$$-a_N T_N + a_P T_P - a_S T_S = a_W T_W + a_E T_E + b \quad (25)$$

Façamos então:

$$A = a_W$$

$$B = a_P$$

$$C = a_E, \text{ e}$$

$$D = a_N T_N + a_S T_S + b,$$

Podemos agora calcular recursivamente ao longo de toda a linha os termos:

$$P_{(i)} = \frac{C_{(i)}}{B_{(i)} - A_{(i)} \cdot P_{(i-1)}}, \text{ e} \quad (26)$$

$$Q_{(i)} = \frac{A_{(i)} \cdot Q_{(i-1)} + D_{(i)}}{B_{(i)} - A_{(i)} \cdot P_{(i-1)}}, \quad (27)$$

Quando o cálculo de P e Q chegar ao último ponto da linha deve-se proceder com cálculo das temperaturas para cada ponto desta linha por substituição reversa:

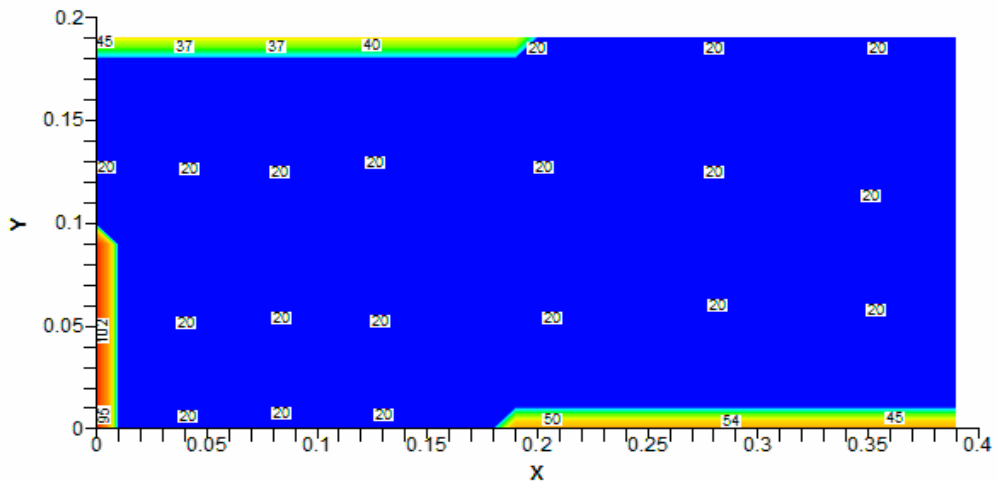
$$T_{(i-1)} = P_{(i-1)} * T_{(i)} + Q_{(i-1)} \tag{28}$$

Esse processo deve ser repetido até que o critério de parada estipulado seja atingido, e logo a seguir avança-se para a próxima linha.

### 3 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

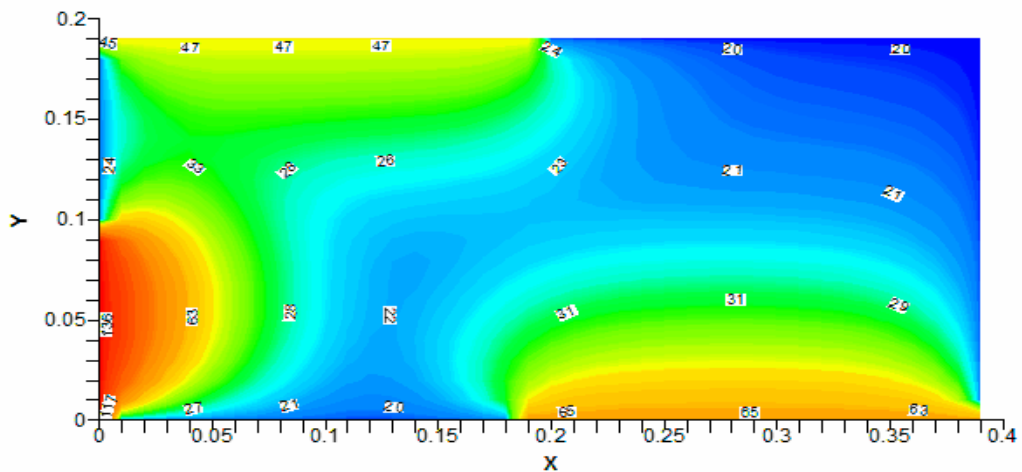
A distribuição de temperaturas após um período tempo de  $\delta t = 300$  segundos pode ser visualizada conforme mostrado nas figura-10, figura-11, figura-12 e figura-13 geradas no software TecPlot®.

**Figura 10** - Distribuição de Temperatura em 0 segundos.



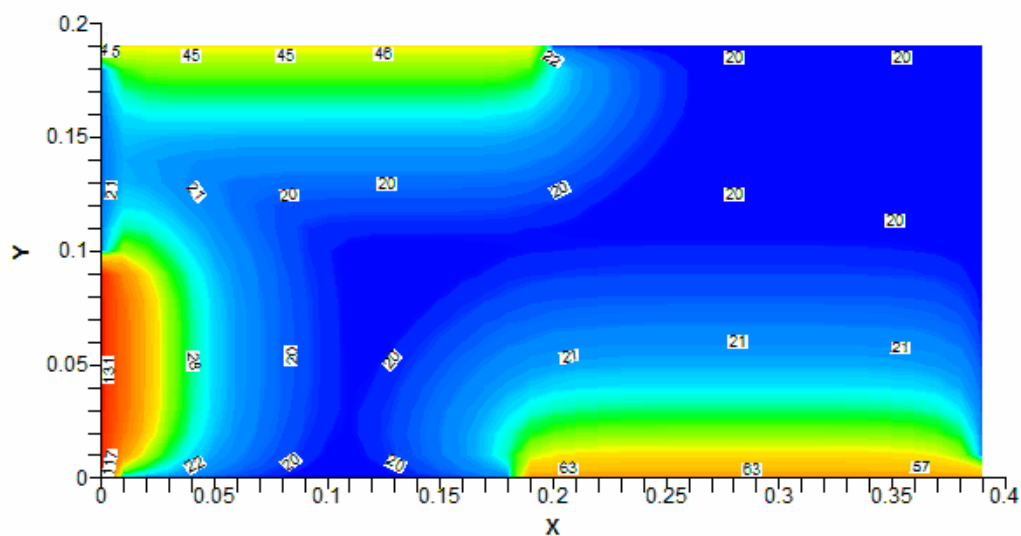
Fonte: Próprio autor

**Figura 11** – Distribuição de Temperatura em 20 segundos.



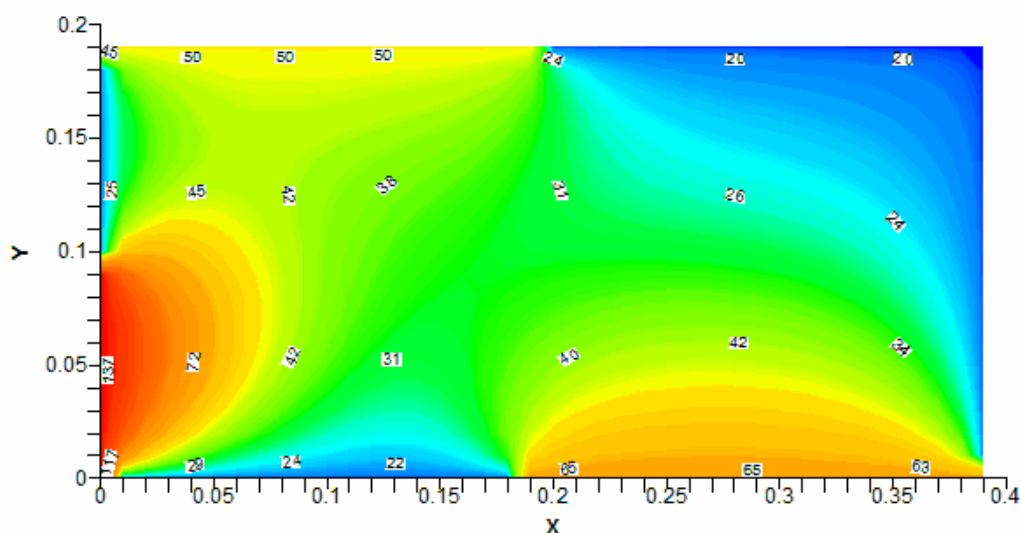
Fonte: Próprio autor

**Figura 12** – Distribuição de Temperatura em 100 segundos.



Fonte: Próprio autor

**Figura 13** – Distribuição de Temperatura em 300 segundos.



Fonte: Próprio autor

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo almeja dar início a uma série de ensaios futuros a respeito da utilização de técnicas numéricas aplicadas a problemas de difusão e convecção de propriedades físicas.

Destaca-se positivamente neste artigo o detalhamento de um código computacional como referência básica para elaboração de outras aplicações com maior grau de complexidade.

O código computacional anexo a este trabalho pode ser facilmente alterado com características físicas de outros materiais e condições de contornos diferentes permitindo assim a predição da distribuição de temperaturas para nossos casos de simulação.

Este trabalho limitou-se a aplicação do método dos volumes finitos a uma geometria simples e com malha de discretização tetraédrica regular.

Sugere-se para trabalhos posteriores aplicar esta metodologia a geometrias mais complexas e com malhas não regulares.

Sugere-se para trabalhos posteriores confrontar os resultados numéricos obtidos com os resultados a partir de uma modelagem algébrica com solução exata.

Sugere-se para trabalhos posteriores confrontar os resultados das simulações com os resultados de softwares comerciais.

## REFERÊNCIAS

- ANDERSON, J. D. **Computational Fluid Dynamics: the basics with applications**. McGraw-Hill: USA, 1995.
- HAHN, B. H.; VELENTINE, D. T. **Essential MATLAB for Engineers and Scientists**. 4. ed. Academic Press: USA, 2010.
- MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. Livros Técnicos e Científicos Editora: Rio de Janeiro, 2010.
- ÖZISIK, M. N. **Transferência de Calor: um texto básico**. Guanabara: Rio de Janeiro, Brasil, 1990.
- PATANKAR, S. V. **Numerical Heat and Transfer and Fluid Flow**. McGraw-Hill: USA, 1980.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: the Finite Volume Method**. Pearson Education Limited: England, 2007.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A - Modelo computacional em Matlab®

O código computacional para resolver o problema foi elaborado em Matlab® conforme listado a seguir.

```
%-----
% Neste trecho do programa são atribuídas algumas constantes físicas do material
%-----
Clear all
Cp=486; % Capacidade térmica do material
kaco=52.9; % Coeficiente de transmissão de calor do material
roaco=7860; % Peso específico do material
L=0.400; % Comprimento da placa
H=0.200; % Largura da placa
dx=0.01; % Discretização no eixo x
dy=0.01; % Discretização no eixo y
dz=0.01; % Espessura da placa
n= (L/dx-1);
m= (H/dy-1);
dt=1;
%-----
% Inicialização das Matrizes de Temperaturas
%-----
t(1:m,1:n)=20; % Temperaturas no passo de tempo anterior
tt(1:m,1:n)=20; % Temperaturas na iteração anterior do passo de tempo atual
ttt(1:m,1:n)=20; % Temperaturas na iteração atual do passo de tempo atual
%-----
% Condição de contorno com temperaturas prescritas
%-----
t(1:m/2,1)=140;
t(m,1:n/2)=50;
t(1,n/2:n)=70;
tt(1:m/2,1)=140;
tt(m,1:n/2)=50;
tt(1,n/2:n)=70;
ttt(1:m/2,1)=140;
ttt(m,1:n/2)=50;
ttt(1,n/2:n)=70;
%-----
% Matriz dos Coeficientes  $A_{nb}$  em todo o domínio da placa
%-----
Aw(1:m,1:n)=kaco*dy*dz/dx;
Ae(1:m,1:n)=kaco*dy*dz/dx;
An(1:m,1:n)=kaco*dx*dz/dy;
As(1:m,1:n)=kaco*dx*dz/dy;
Apo(1:m,1:n)=roaco*Cp*dx*dy*dz/dt;
%-----
% Componentes do Termo Fonte Linearizados
%-----
Sp(1:m,1:n)=0;
```



```

Su(1:m,1:n)=0;
Su(1:m/2,1)=2*kaco*dy*dz*t(1:m/2,1)/dx;
Su(m,1:n/2)=2*kaco*dx*dz*t(m,1:n/2)/dy;
Su(1,n/2:n)=2*kaco*dx*dz*t(1,n/2:n)/dy;
Sp(1:m/2,1)=-2*kaco*dy*dz/dx;
Sp(m,1:n/2)=-2*kaco*dx*dz/dy;
Sp(1,n/2:n)=-2*kaco*dx*dz/dy;
Aw(1:m,1)=0; % Os coeficientes Aw são nulos nos primeiros pontos ao longo da extremidade
% oeste da placa
Ae(1:m,n)=0; % Os coeficientes Ae são nulos nos últimos pontos ao longo da extremidade
% leste da placa
An(m,1:n)=0; % Os coeficientes An são nulos na última linha ao longo da extremidade norte
% da placa
As(1,1:n)=0; % Os coeficientes As são nulos na primeira linha ao longo da extremidade sul
% da placa
%-----
% Cálculo do coeficiente Ap em todo o domínio
%-----
for i=1:m
    for j=1:n
        Ap(i,j)=Ae(i,j)+Aw(i,j)+An(i,j)+As(i,j)+Apo(i,j)-Sp(i,j);
    end
end
%-----
% Definição dos parâmetros de simulação
%-----
itermax=100; % Número de iteração máxima por passo de tempo
iter=0; % Contador de iterações no passo de tempo
tempo=0; % Inicialização do passo de tempo
tempomax=300; % Tempo máximo de simulação
%-----
% Criação do arquivo de dados para uso com o software TECPLOT®
%-----
fid=fopen('CDiem.dat','w'); % Abertura de arquivo .dat para gravação dos dados
fprintf(fid, 'TITLE="TEMPERATURA"\r\n'); % Cabeçalho
fprintf(fid, 'Variables=X, Y, TEMPERATURA\r\n'); % Cabeçalho
fprintf(fid, 'Zone T="Zone-One",I=%d,J=%d,F=Point\r\n',n,m); % Cabeçalho
%-----
% Gravação dos resultados para o passo de tempo=0
%-----
for i=1:m
    for j=1:n
        fprintf(fid, '%d %d %3.5f\r\n',((j-1)*dx),((i-1)*dy),tt(i,j));
    end
end
%-----
% Solução do sistema de equações usando o algoritmo de Thomas - TDMA
%-----
P(1:m,1:n)=0; % Matriz de zeros para os coeficientes P(1)
Q(1:m,1:n)=0; % Matriz de zeros para os coeficientes Q(1)

```

```

while tempo<tempomax
  for i = 2:m-1
    P(i,1)=Ae(i,1)/Ap(i,1); % Cálculos dos coeficientes P1
    Q(i,1)=tt(i,1); % Cálculos dos coeficientes Q1
    res=1; % Inicialização do resíduo para avaliação do critério de parada
    while res>0.000001 % Resíduo máximo 10e-6
      for j=2:n
        P(i,j)=Ae(i,j)/(Ap(i,j)-Aw(i,j)*P(i,j-1)); % Cálculos dos coeficientes P(i)
        Q(i,j)=((An(i,j)*ttt(i+1,j)+As(i,j)*ttt(i-1,j)+Apo(i,j)*t(i,j)+
        Su(i,j))+Aw(i,j)*Q(i,j-1))/(Ap(i,j)-Aw(i,j)*P(i,j-1)); % Cálculos dos
        coeficientes Q(i)
      end
      for j=n-1:-1:2
        ttt(i,j)=P(i,j)*tt(i,j+1)+Q(i,j); % Cálculo da temperatura por substituição reversa
      end
      for j=1:n
        res1(j)=abs((tt(i,j)-ttt(i,j))/ttt(i,j)); % Cálculo do resíduo
      end
      res=max(max(res1));
      tt=ttt; % Atualização das temperaturas para iteração subsequente
      iter=iter+1; % Incremento no número de iterações no passo de tempo atual
    end
    iter=0; % Re-inicialização do número de iterações para novo passo de tempo
  end
  t=tt; % Atualização das temperaturas para o próximo passo de tempo
  tempo=tempo+dt % Incremento do tempo de simulação
  %
  % Gravação dos resultados após convergência no passo de tempo atual
  %
  fprintf(fid, 'TITLE="TEMPERATURA"\r\n');
  fprintf(fid, 'Variables=X, Y, TEMPERATURA\r\n');
  fprintf(fid, 'Zone T="Zone-One",I=%d,J=%d,F=Point\r\n',n,m);
  for i=1:m
    for j=1:n
      fprintf(fid, '%d %d %3.5f\r\n',((j-1)*dx),((i-1)*dy),tt(i,j));
    end
  end
end
end
%-----
% Plotagem do gráfico no ambiente Matlab®
%-----
colormap(jet); % Definindo qualidade da imagem no ambiente Matlab®
mesh(tt),colorbar; % Plotagem da superfície com legenda de valores
view(0,90) % Angulo de visualização 2-D do gráfico
fclose(fid) % Fechamento do arquivo de dados

```