

UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE COLOCAÇÃO PONTUAL PARA PROBLEMAS DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO COM FONTE DE CALOR

Roberto Pettres ¹

RESUMO: Neste artigo é apresentado o desenvolvimento de uma formulação matemática para solução da equação da difusão-advecção com a inserção de um termo não homogêneo na equação diferencial tradicional. A formulação baseia-se em técnicas de resíduos ponderados, a qual adota o Métodos de Colocação Pontual (MCP) para obtenção de soluções aproximadas. São utilizadas funções de interpolação polinomiais e o termo potencial derivativo presente na equação diferencial é resolvido com uso de um esquema de marcha no tempo baseado no conceito de derivada, cuja dependência temporal é imposta ao coeficiente de ponderação da referida função. Foram obtidos resultados precisos para os valores de temperatura e fluxo no domínio do problema e o uso do esquema de marcha no tempo proposto evita que seja necessária a utilização de outros métodos de discretização ou do cálculo de integrais de domínio. Na análise do efeito advectivo em cada caso testado, verificou-se o progressivo efeito da advecção no fenômeno difusivo-advectivo quando são adotados valores crescentes para a velocidade advectiva, não sendo observada instabilidade nos testes realizados.

Palavras-chave: Equação da Difusão-Advecção. Método de Colocação. Esquema de marcha no tempo.

ABSTRACT: In this paper present the development of a mathematical formulation for the solution of the diffusion-advection equation with the insertion of a non-homogeneous term into the traditional differential equation. The formulation is based on weighted residual techniques, which adopts Collocation Point Methods (CPM) to obtain approximate solutions. Polynomial interpolation functions are used and the term derivative potential present in the differential equation is solved using a scheme based on the concept of derivative whose temporal dependence is imposed on the weighting coefficient of this function. Accurate results were obtained for the temperature and flux values in the problem domain and the use of the proposed time-marching scheme avoids the use for other discretization methods or domain integral calculations. In the analysis of the advective effect in each case tested, has been verified the progressive effect of advection on the diffusive-advective phenomenon when increasing values for advective velocity were adopted, with no instability observed in the tests performed.

Keywords: Advection-Diffusion equation. Collocation Method. Time-marching scheme.

¹ UFPR – Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Brasil. E-mail: pettres@ufpr.br.

1 INTRODUÇÃO

A solução de problemas de engenharia passa por diversas etapas, entre elas a modelagem matemática, a imposição de condições especiais e a escolha do método de resolução a ser adotado. Em cada uma dessas etapas, procura-se representar determinado fenômeno a partir de um problema equivalente, cujas hipóteses simplificadoras tornam o problema possível de ser resolvido, sendo considerados os parâmetros fundamentais do problema e que podem ser descritos matematicamente através de um sistema de equações diferenciais válido em todo o domínio do problema.

Sendo uma simplificação do problema real, a solução do problema equivalente passa a ser uma solução aproximada, obtida a partir de modelos discretos ou numéricos com um número finito de graus de liberdade em um sistema de equações algébricas. Na prática de engenharia há vários problemas nos quais as soluções não podem ser encontradas diretamente a partir do emprego de métodos clássicos usuais, principalmente se a equação diferencial não for linear, sendo conhecida a solução exata somente em determinados casos restritos, daí a importância em se saber como as soluções se apresentam quando se introduz uma aproximação.

Este é um problema desafiador enfrentado pelos engenheiros e matemáticos aplicados que trabalham no desenvolvimento de técnicas para encontrar soluções para as equações básicas que surgem nesse campo. Idealmente, espera-se encontrar soluções aproximadas com um nível de erro extremamente pequeno quando comparadas à soluções analíticas, quando obtidas através do uso de métodos padrão de resolução sob determinadas limitações.

De acordo com Lemos (2007), as metodologias voltadas ao emprego de métodos aproximados indicadas pela literatura para resolução numérica de Equações Diferenciais são: Método de Diferenças Finitas (MDF), Método de Elementos Finitos (MEF), Método de Volumes Finitos (MVF), Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Resíduos Ponderados (MRP).

O MRP estabelece uma condição natural para a aquisição de soluções aproximadas de vários problemas de engenharia. Segundo Assan (2003), o Método dos Resíduos Ponderados distingue-se dos métodos ditos variacionais por não carecer da existência de um funcional, utilizando diretamente a equação diferencial do problema a ser resolvido (MELO, 2012).

Dentre os métodos pertencentes à classe do MRP, encontram-se como os mais utilizados o Método de Galerkin, o Método dos Momentos, o Método dos Mínimos Quadrados, o Método de Colocação Ortogonal (MCO) e o Método de Colocação Pontual (MCP). A aplicação do MRP consiste basicamente em aproximar a variável dependente do problema por expansões em séries de funções conhecidas, com coeficientes a determinar, chamadas de funções tentativas ou de interpolação. A substituição da aproximação proposta na equação diferencial dá origem ao resíduo da aproximação. Anulando a média ponderada deste resíduo no domínio do problema pode-se então determinar os coeficientes das funções tentativas propostas (LEMOS, 2007).

Sobre o MCP, trabalha-se diretamente com a forma forte do sistema de equações diferenciais, de simples e eficiente implementação computacional e não necessita de integração numérica, apresentando-se como um método verdadeiramente sem malha (TELLES *et al.*, 2004). Devido a essas vantagens, o método sem malha de formulação forte é usado em mecânica computacional com bastante sucesso (LIU e GU, 2005), especialmente em engenharia e mecânica dos fluidos.

Trabalhos que empregam o MCP são encontrados em Sharma e Taneja (1992), em uma aplicação envolvendo propagação de ondas em estruturas, em Telles *et al.* (2004), no qual foram simuladas numericamente sistemas de proteção catódica, Mai-Duy e Tanner (2007) com o uso de funções de interpolação de base radial para resolver equações diferenciais em um estudo unidimensional, Nagamine e Cuminato (2010) em um estudo numérico sobre equações integro-diferenciais singulares lineares, em Russell e Shampine (1972) e Silva e Torri (2015), na análise de Problemas de Valores de Contorno (PVC) unidimensionais, em Soliman, Al-Zeghayer e Ajbar (2014) em problemas de difusão e reação, Kazemi (2015), na análise da equação da difusão e da onda. Para maiores detalhes sobre os aspectos históricos do Método de Colocação sugere-se o trabalho de Lemos (2007) e Kajotoni (2008).

Nesse trabalho, com o uso do MCP busca-se subsidiar a solução de problemas de engenharia relacionados a equação da difusão-advecção, cuja inserção de um termo não homogêneo representando uma fonte de calor ou sumidouro pode ampliar as possibilidades de uso da equação, cuja compreensão do fenômeno em questão constitui a principal motivação e justificativa para realização deste trabalho.

A formulação proposta apresenta um esquema de marcha no tempo para o problema transiente baseando-se na definição de derivada, admitindo que os

coeficientes a determinar de ponderação apresentam dependência temporal. Ainda, o trabalho demonstra que tal esquema aplicado em conjunto com o Método de Colocação apresenta potencial para ser aplicado em problemas transientes de difusão-advecção, apresentando resultados precisos e com a necessidade de poucos pontos de colocação para a convergência, inclusive em problemas não homogêneos, cujos resultados são apresentados ao final do trabalho.

2 MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático escolhido para este estudo é Equação da Difusão-Advecção com termo fonte, dada por:

$$\alpha \nabla^2 u(x,t) - \nabla \cdot \left[\vec{v}(x) u(x,t) \right] + \frac{F}{k} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (1)$$

$x \in \Omega, \Omega = [0 L]$

onde u é a temperatura (°C), \vec{v} é o vetor velocidade (m/s) de advecção, F é uma fonte ou sumidouro de calor (°C/s), k é a condutividade térmica (J/s.m.°C), α é o coeficiente de difusividade (m²/s) e L é o comprimento do domínio (m) considerado com um meio homogêneo e isótropo.

De acordo com Singh e Tanaka (2000), a equação (1) pode ser utilizada em aplicações físicas que envolvem o transporte de energia e/ou produtos químicos. Ainda na equação (1), o termo cinético, $\nabla \cdot \left[\vec{v}(x) u(x,t) \right]$ pode ser escrito como:

$$\nabla \cdot \left[\vec{v}(x) u(x,t) \right] = \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x,t) + u(x,t) \nabla \cdot \vec{v}(x) \quad (2)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (2), representa o gradiente térmico, devido ao transporte da massa fluida com velocidade \vec{v} e o segundo termo representa a temperatura estabelecida pelo gradiente de velocidade (variação da velocidade com a posição). Nesse estudo diferentes abordagens em relação a equação da difusão são adotadas, entre eles, velocidade constante ao longo do domínio, velocidade variável ao longo do domínio e é a realizada a inserção de um termo que representa uma fonte.

2.1 MODELO GEOMÉTRICO

O modelo geométrico é uma barra de comprimento igual a L sob as condições contorno essenciais em u , e naturais em q :

$$\begin{aligned}
u(0,t) &= \hat{u} \\
u(L,t) &= \hat{u} \\
q(0,t) &= \hat{q} \\
q(L,t) &= \hat{q}
\end{aligned}
\tag{3}$$

onde q é o fluxo de transferência calor (W/m). A condição inicial é dada por:

$$u(x,0) = f(x,t)^\circ C \tag{4}$$

3 FORMULAÇÃO COM MÉTODO DE COLOCAÇÃO

O método da colocação foi desenvolvido em 1937 por Frazer, Jones e Skan (FINLAYSON e SCRIVEN, 1966). Neste método a função de ponderação w_i é um delta de Dirac em n pontos interiores (chamados pontos de colocação) do domínio de interesse:

$$w_i = \delta(x - x_i), \text{ onde } i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{5}$$

Uma das propriedades da função Delta de Dirac é a seguinte:

$$\int_a^b \bar{u}(x) w_i dx = \bar{u}(x_i) \tag{6}$$

onde, $\delta(x - x_i)$ é nula nos diferentes pontos do domínio, se não, no próprio ponto, como indicado em (7).

$$w_i = \delta(x - x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_i \\ 0 & \text{se } x \neq x_i \end{cases} \tag{7}$$

A função $\bar{u}(x,a)$ é definida como uma solução aproximada da solução exata do problema e pode assumir a seguinte forma:

$$\bar{u}(x,a) = a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + a_3 \phi_3 + \dots + a_n \phi_n \tag{8}$$

onde a são os coeficientes desconhecidos e ϕ são uma sequência de funções linearmente independentes conhecidas, também chamadas de funções de interpolação. Segundo Snyder *et al.* (1964), a utilização de funções de interpolação que satisfaçam as condições de contorno e tenham sua própria propriedade de simetria, proporciona que resultados mais precisos sejam obtidos com a utilização de poucos termos de expansão. Em geral nos problemas de engenharia, prefere-se usar valores nodais conforme eles

têm um significado físico claro e este é feito em elementos finitos, diferenças finitas ou métodos dos elementos de contorno (LEMOS, 2007).

Neste método os coeficientes a são determinados impondo-se a anulação do resíduo em distintos pontos do domínio (PAVANELLO, 1997 *apud* MELO, 2012), de tal forma que:

$$\int_a^b [R(x, a_1, \dots, a_n) \delta(x - x_i)] dx = 0 \quad (9)$$

Com isso, força-se o resíduo a ser nulo nos pontos interiores de colocação x_1, \dots, x_n , portanto:

$$R(x, a_1, \dots, a_n) = 0 \quad (10)$$

Assim, partir do modelo matemático e do modelo geométrico obtêm-se a equação de resíduos ponderados:

$$\alpha \nabla^2 \bar{u}(x, t) - \nabla \cdot \left[\vec{v}(x) \bar{u}(x, t) \right] + \frac{F}{k} - \frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial t} = R(x, a) \quad (11)$$

Em relação aos pontos de colocação, a grande maioria dos trabalhos encontrados na literatura faz uso da aproximação polinomial de Lagrange, adotando como pontos de colocação as raízes do polinômio de Jacobi, com os parâmetros α e β da função peso selecionados de acordo com o tipo de problema. Observa-se, em inúmeros exemplos encontrados na literatura, que não existe um procedimento sistemático para seleção destes parâmetros, fazendo com que na maioria das vezes os valores sejam escolhidos de forma errada, comprometendo a eficiência do método (LEMOS, 2007). A distribuição dos pontos de colocação é em princípio arbitrária, mas na prática melhores resultados são obtidos se eles são uniformemente distribuídos (BREBBIA, 1978). Nesse trabalho para definição dos pontos de colocação será adotada distribuição uniforme.

3.1 EXEMPLOS

A formulação proposta foi aplicada em quatro casos admitindo $L = 1$ m, $F = 100$ °C/s, $\alpha = 1$ m²/s, $k = 1$ J/s.m.°C e valores variados para o valor da velocidade advectiva, apresentados nos exemplos a seguir:

3.2 PROBLEMA ESTACIONÁRIO COM CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS PREESCRITAS

Definindo-se as condições de contorno essenciais para o problema:

$$u(0) = 0^{\circ}C \quad u(L) = 0^{\circ}C \quad (12)$$

Assumindo $\bar{u}(x)$ como:

$$\bar{u}(x_i, a_i) = a_i x_i (1 - x_i) \quad (13)$$

que atende as condições de contorno e aplicando-as à equação (11) :

$$-2a_i - \vec{v}(x_i)(a_i - 2a_i x_i) - a_i x_i (1 - x_i) \nabla \vec{v}(x_i) + F = 0 \quad (14)$$

O coeficiente a_i é calculado como:

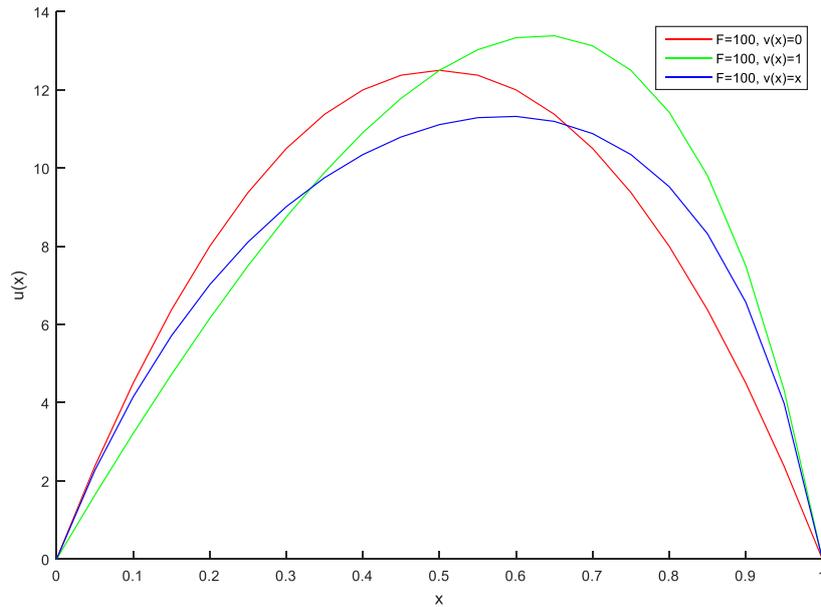
$$a_i = \frac{F}{2 + \vec{v}(x_i) - 2\vec{v}(x_i)x_i + \nabla \vec{v}(x_i)x_i(1 - x_i)} \quad (15)$$

Definindo-se três casos:

- (i) $F=100^{\circ}C/s$ e $\vec{v}(x) = 0$ m/s;
- (ii) $F=100^{\circ}C/s$ e $\vec{v}(x) = 1$ m/s e
- (iii) $F=100^{\circ}C/s$ e $\vec{v}(x) = x$ m/s.

com $n = 20$, tem-se os seguintes resultados:

Figura 1 – Resultados para a solução aproximada da forma $u(x) = ax(1 - x)$.



A Figura 1 ilustra as soluções obtidas para os três citados anteriormente, onde é possível comparar os resultados para o caso puramente difusivo, $\vec{v}(x) = 0$ m/s, com os casos difusivo-advectivos, $\vec{v}(x) = 1$ m/s e $\vec{v}(x) = x$ m/s, respectivamente.

4.2 PROBLEMA TRANSIENTE COM CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS PRESCRITAS

Para o problema transiente adotando-se as condições de contorno essenciais dadas em (12) e a condição inicial é dada por:

$$u(x,0) = 0^\circ C \tag{16}$$

que representa temperatura do domínio nula apenas no início do processo difusivo-advectivo.

Assumindo \bar{u} como:

$$\bar{u}(x_i, a_i(t)) = a_i(t) x_i(1 - x_i) \tag{17}$$

que atende as condições de contorno e aplicando-as à equação (11) :

$$-2a_i(t) - \vec{v}(x_i)(a_i(t) - 2a_i(t)x_i) - a_i(t)x_i(1-x_i)\nabla \vec{v}(x_i) + F - \frac{\partial \bar{u}(x_i, a_i(t))}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

Na equação (18) apresenta-se um termo de potencial derivativo com dependência temporal, o qual é aproximado utilizando a definição de derivada:

$$\frac{\partial \bar{u}(x_i, a_i(t))}{\partial t} \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{u}(x_i, a_i(t_j)) - \bar{u}(x_i, a_i(t_{j-1}))}{\Delta t}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

Calculando (19) em função de (17) apenas em relação aos coeficientes a determinar, vem:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{u}(x_i, a_i(t_j)) - \bar{u}(x_i, a_i(t_{j-1}))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_i(t_j) - a_i(t_{j-1})}{\Delta t} x_i(1-x_i) \quad (20)$$

Aplicando (20) em (18), vem:

$$-2a_i(t_j) - \vec{v}(x_i)(a_i(t_j) - 2a_i(t_j)x_i) - a_i(t_j)x_i(1-x_i)\nabla \vec{v}(x_i) + F - \frac{a_i(t_j) - a_i(t_{j-1})}{\Delta t} x_i(1-x_i) = 0 \quad (21)$$

O coeficiente $a_i(t_j)$ é calculado como:

$$a_i(t_j) = \frac{\Delta t F + a_i(t_{j-1})x_i(1-x_i)}{\Delta t [2 + \vec{v}(x_i) - 2\vec{v}(x_i)x_i + \nabla \vec{v}(x_i)x_i(1-x_i)] + x_i(1-x_i)} \quad (22)$$

Definindo-se três casos:

- (i) $F=100 \text{ }^\circ\text{C/s}$ e $\vec{v}(x) = 0 \text{ m/s}$;
- (ii) $F=100 \text{ }^\circ\text{C/s}$ e $\vec{v}(x) = 1 \text{ m/s}$ e
- (iii) $F=100 \text{ }^\circ\text{C/s}$ e $\vec{v}(x) = x \text{ m/s}$;

com $n = 20$, $\Delta t = 0.01\text{s}$, $t = 1\text{s}$ e $\alpha = 1 \text{ m}^2/\text{s}$, tem-se os seguintes resultados:

Figura 2 – Resultados para a solução aproximada da forma $u(x,t) = a(t) x (1 - x)$.

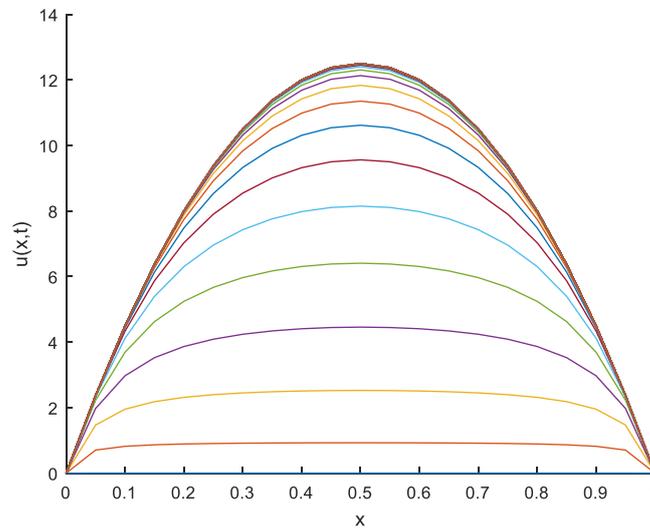
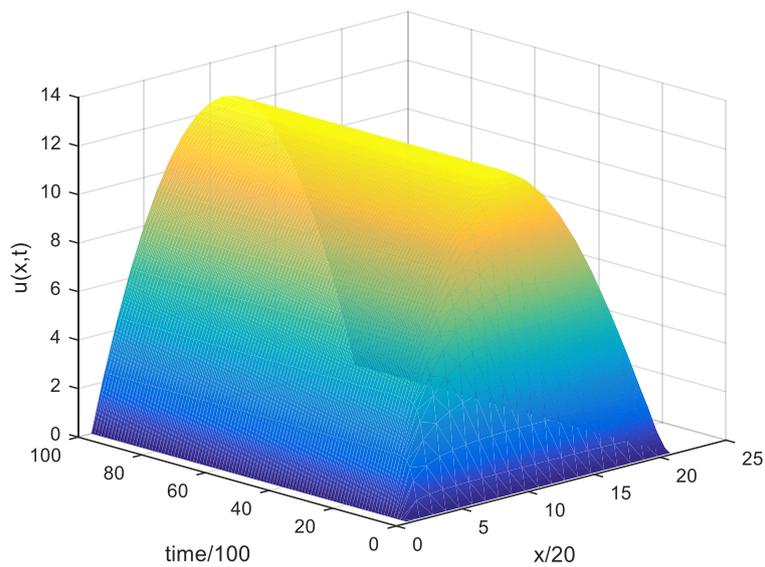


Figura 3 – Resultados para a solução aproximada da forma $u(x,t) = a(t) x (1 - x)$ ao longo do tempo.



As Figuras 2 e 3 ilustram as soluções obtidas ao longo do tempo para o primeiro caso citado anteriormente, onde é possível verificar a elevação da temperatura de forma simétrica ao longo da barra, convergindo para o estado estacionário de difusão do calor.

Figura 4 – Resultados para a solução aproximada da forma $u(x,t) = a(t) x (1 - x)$.

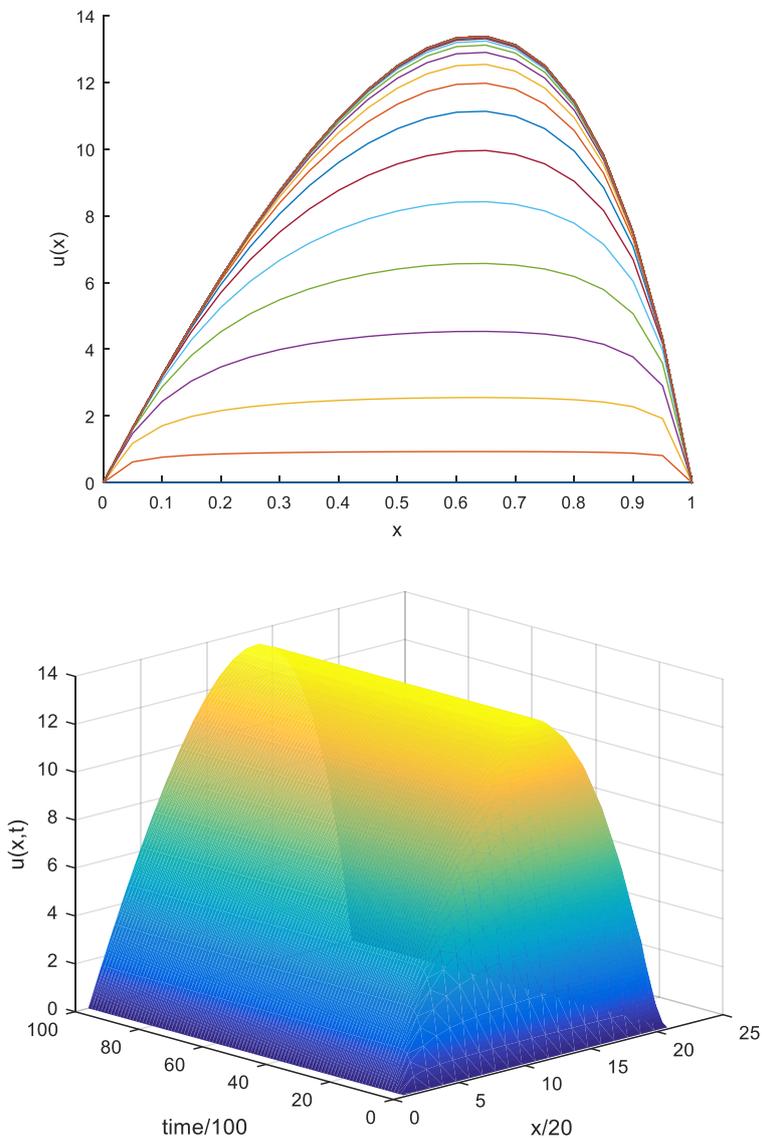


Figura 5 – Resultados para a solução aproximada da forma $u(x,t) = a(t) x (1 - x)$ ao longo do tempo.

As Figuras 4 e 5 ilustram as soluções obtidas ao longo do tempo para o segundo caso citado, no qual assume-se velocidade advectiva constante, $\vec{v}(x)=1$ m/s, onde é possível verificar o efeito advectivo no processo difusivo-advectivo a partir da elevação da temperatura de forma assimétrica ao longo da barra, convergindo para um estado estacionário de difusão-advectação do calor.

Figura 6 – Resultados para a solução aproximada da forma $u(x,t) = a(t) x (1 - x)$.

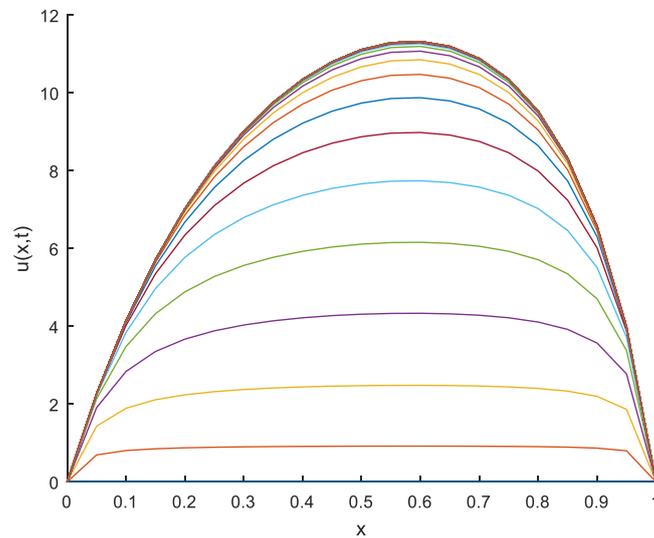
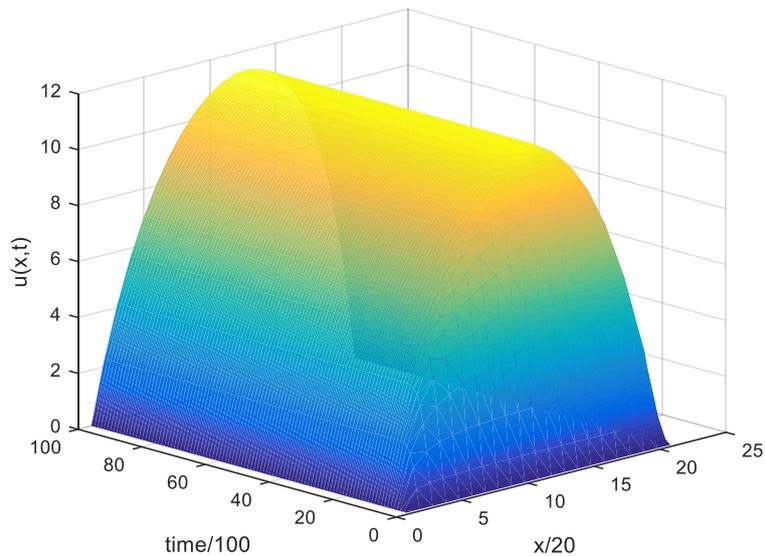


Figura 7 – Resultados para a solução aproximada da forma $u(x,t) = a(t) x (1 - x)$ ao longo do tempo.



As Figuras 6 e 7 ilustram as soluções obtidas ao longo do tempo para o segundo caso citado, no qual assume-se velocidade advectiva variável ao longo do domínio, $\vec{v}(x) = x$ m/s, onde é possível verificar o efeito advectivo no processo difusivo-

advectivo a partir da elevação da temperatura de forma assimétrica ao longo da barra, convergindo para um estado estacionário de difusão-advvecção do calor.

4.3 ANÁLISE DOS COEFICIENTES $a_i(t)$ PARA OS PROBLEMAS TRANSIENTES

Em cada exemplo testado anteriormente, os coeficientes $a_i(t)$ foram calculados a cada iteração. As Figuras 8 e 9 ilustram os valores de a_i ao longo do tempo no caso onde foram adotados $F = 100$ °C/s e $\vec{v}(x) = 0$ m/s.

Figura 8 – Superfície de resultados para os coeficientes $a(t)$ para o caso com $F=100$ °C/s e $\vec{v} = 0$ m/s.

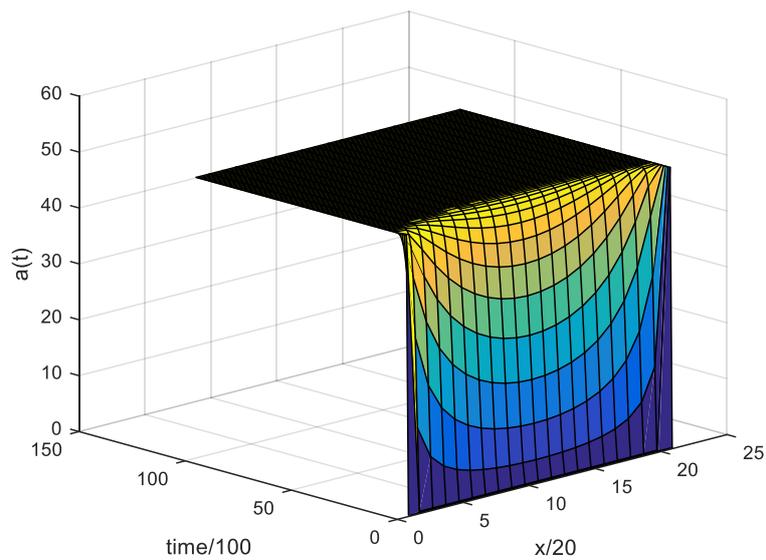
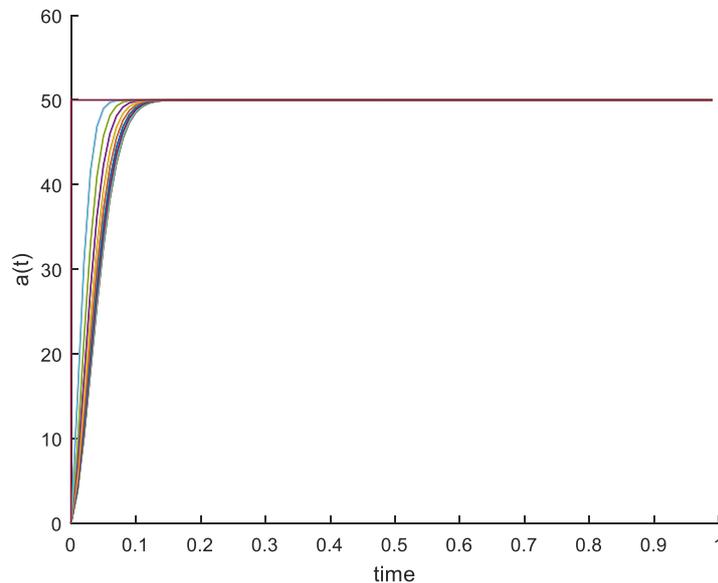


Figura 9 – Resultados para os coeficientes $a(t)$ para o caso com $F=100^\circ\text{C/s}$ e $\vec{v} = 0$ m/s.



Na Figura 8 pode-se verificar a simetria nos valores obtidos para os coeficiente a_i em relação a localização de cada ponto de colocação ao longo do domínio. Na Figura 9, verifica-se que os coeficientes a_i ($i=2,\dots,19$) convergem para os valores de a_1 e a_{20} calculados para os ponto de colocação nas extremidades após determinado intervalo de tempo. Essa convergência relaciona-se com o fato de que, dadas as condições de contorno e a fonte utilizadas, o fenômeno de difusão do calor passa do estado transiente para o estado estacionário, elevando a temperatura do domínio até um valor limite e de igual forma, os valores dos coeficientes a_i .

As Figuras 10 e 11 ilustram os valores obtidos para a_i para o caso com $F = 100$ $^\circ\text{C/s}$ e $\vec{v}(x) = 1$ m/s.

Figura 10 – Superfície de resultados para os coeficientes $a(t)$ para o caso com

$$F=100^\circ\text{C/s e } \vec{v} = 1 \text{ m/s.}$$

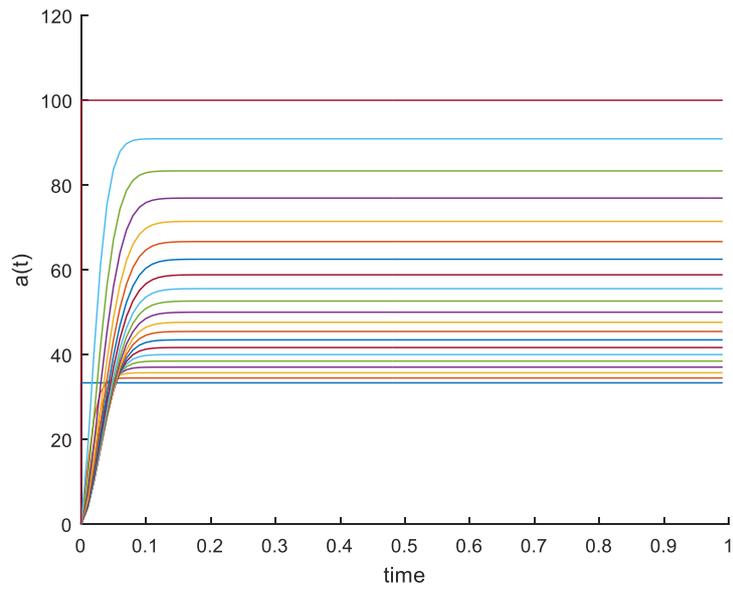
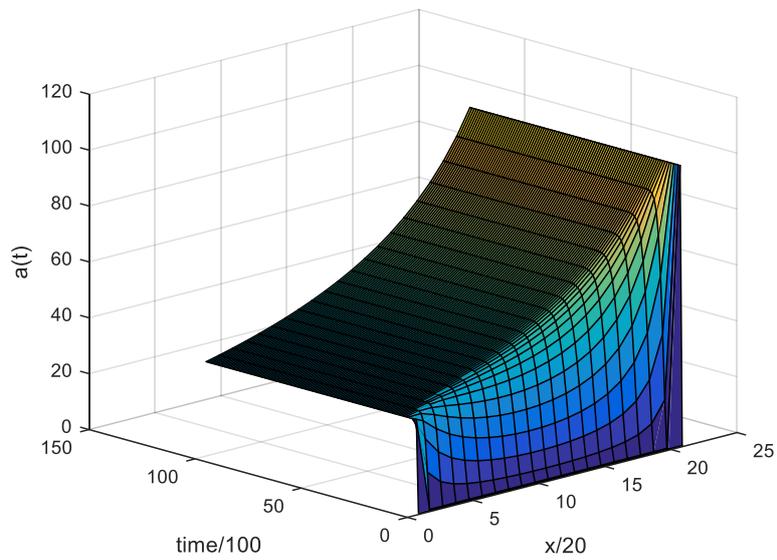
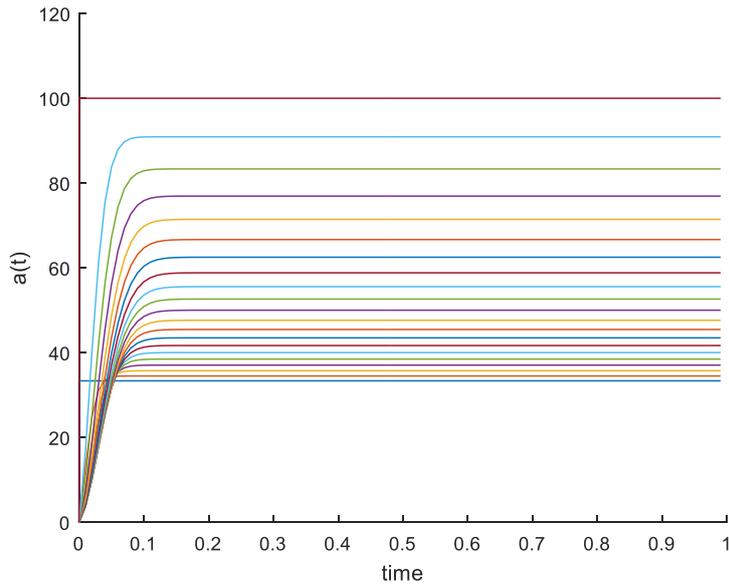


Figura 11 – Resultados para os coeficientes $a(t)$ para o caso com $F=100^{\circ}\text{C/s}$ e $\vec{v} = 1$ m/s.





Na Figura 10 pode-se verificar a que não há simetria nos valores obtidos para os coeficiente a_i em relação a localização de cada ponto de colocação. Esses valores crescem a uma taxa cada vez menor, convergindo individualmente para um valor limite, como ilustrado na Figura 11. A explicação para essa convergência mais uma vez relaciona-se com a transição do estado transiente para o estado estacionário de difusão do calor.

As Figuras 12 e 13 ilustram os resultados obtidos para os valores de a_i no caso em que vale $F = 100\text{ }^\circ\text{C/s}$ e $\vec{v}(x) = x\text{ m/s}$, representando velocidade advectiva variável, crescente no domínio.

Figura 12 – Resultados para os coeficientes $a(t)$ para o caso com $F=100^\circ\text{C/s}$ e $\vec{v} = x\text{ m/s}$.

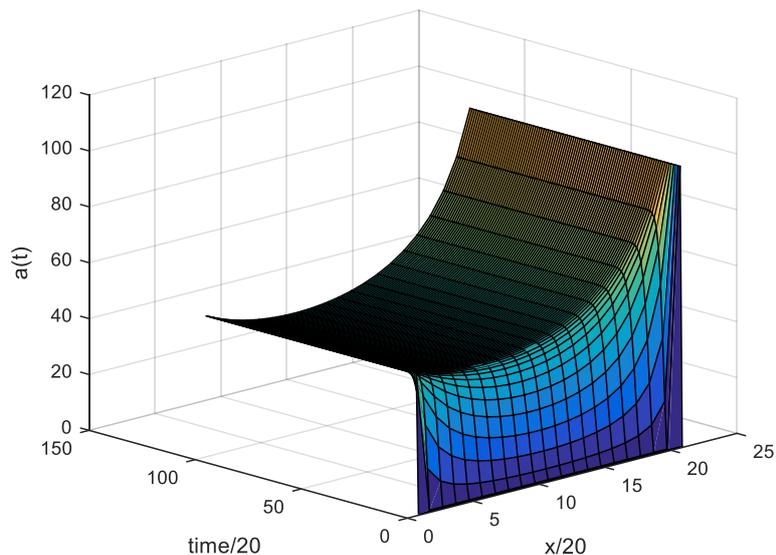
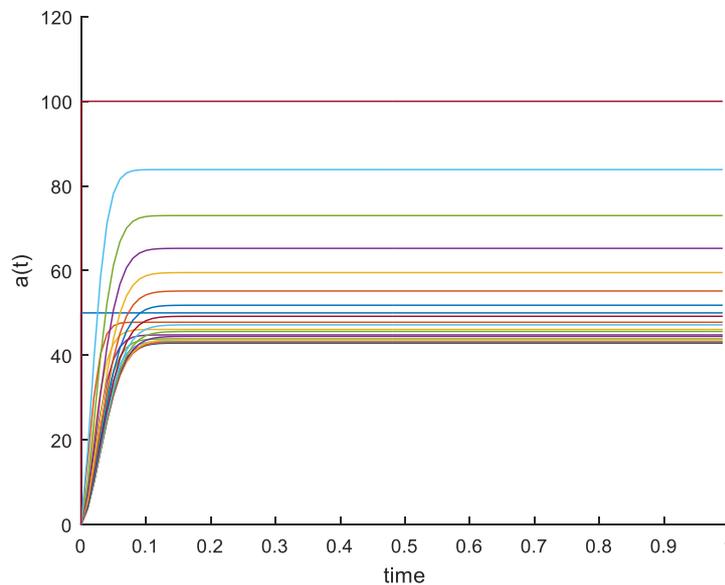


Figura 13 – Resultados para os coeficientes $a(t)$ para o caso com $F=100^\circ\text{C/s}$ e $\vec{v} = x$ m/s.

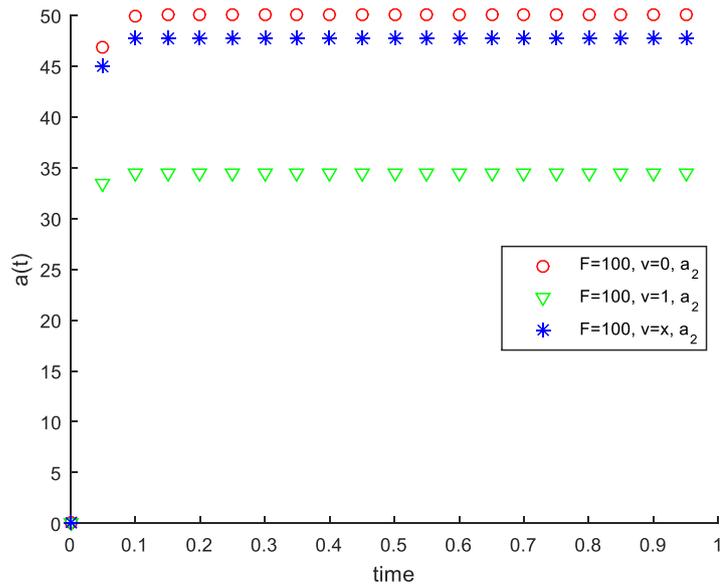


Na Figura 12 pode-se verificar que os valores obtidos para os coeficiente a_i decrescem a partir do contorno em direção ao centro do domínio quando analisa-se um instante de tempo específico, porém, quando um coeficiente a_i é analisado individualmente, este cresce a uma taxa cada vez menor de forma semelhante aos casos já abordados, convergindo para um valor limite, como ilustrado na Figura 13. Mais uma vez, a explicação para essa convergência relaciona-se a transição do estado transiente para o estado estacionário de difusão do calor.

Ainda analisando os coeficiente a_i , nas Figuras 14, 15 e 16 são comparados valores de a_i cujo ponto de colocação localiza-se em $x = 0.05$ m (a_2), $x = 0.5$ m (a_{11}) e $x = 0.95$ m (a_{19}), respectivamente.

Na Figura 14 verifica-se a influência da velocidade advectiva no cálculo do coeficiente a_2 , onde ao utilizar valores cada vez maiores para \vec{v} ($\vec{v} = 0$ m/s, $\vec{v} = x$ m/s ($x = 0.05$) e $\vec{v} = 1$ m/s), registram-se valores cada vez menores para a_2 .

Figura 14 – Resultado para o coeficiente $a_2(t)$ para os casos com $F=100^\circ\text{C/s}$, $\vec{v} = 0$ m/s, $\vec{v} = 1$ m/s e $\vec{v} = x$ m/s.



Na Figura 15, de forma semelhante ao caso anterior, verifica-se a influência da velocidade advectiva no cálculo do coeficiente a_{11} localizado no centro do domínio, porém, nos casos em que a velocidade é constante, $\vec{v} = 0$ m/s e $\vec{v} = 1$ m/s, foram registrados valores iguais para a_{11} e valores menores quando $\vec{v} = x$ m/s ($x = 0.5$).

Figura 15 – Resultado para o coeficiente $a_{11}(t)$ para os casos com $F=100^\circ\text{C/s}$, $\vec{v} = 0$ m/s, $\vec{v} = 1$ m/s e $\vec{v} = x$ m/s.

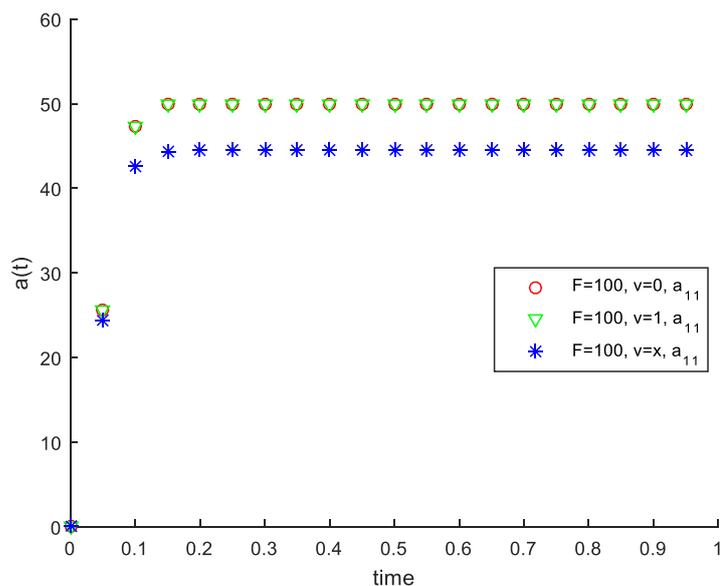
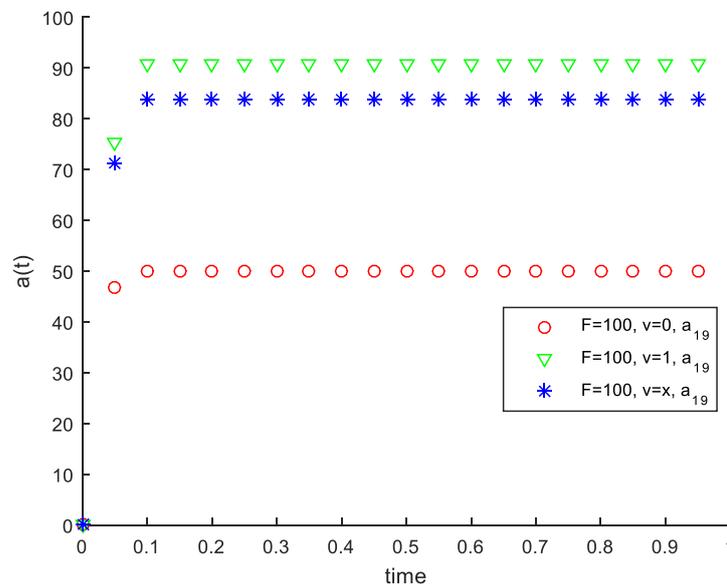


Figura 16 – Resultado para o coeficiente $a_{19}(t)$ para os casos com $F=100^\circ\text{C/s}$, $\vec{v} = 0$ m/s, $\vec{v} = 1$ m/s e $\vec{v} = x$ m/s.



Na Figura 16 observa-se que os valores de a_{19} , cujo ponto de colocação é $x = 0.95$ m, distribuem-se de forma oposta ao observado na outra extremidade, onde ao utilizar valores cada vez maiores para \vec{v} ($\vec{v} = 0$ m/s, $\vec{v} = x$ m/s ($x = 0.05$) e $\vec{v} = 1$ m/s), nesse estudo registram-se valores cada vez maiores para a_{19} . A explicação para essa diferença relaciona-se com a distribuição de energia no domínio. No primeiro caso, com $\vec{v} = 0$ m/s, a distribuição de energia é simétrica do centro do domínio em direção às extremidades e os coeficientes a_2 e a_{19} tem igual valor, como ilustrados nas Figuras 14 e 16. Nos segundo e terceiro casos, com $\vec{v} = x$ m/s $\vec{v} = 1$ m/s, respectivamente, a distribuição se dá de forma assimétrica com maior concentração na segunda metade do domínio e os coeficientes comparando a_2 e a_{19} , verifica-se que $a_2 < a_{19}$, como ilustrados nas Figuras 14 e 16.

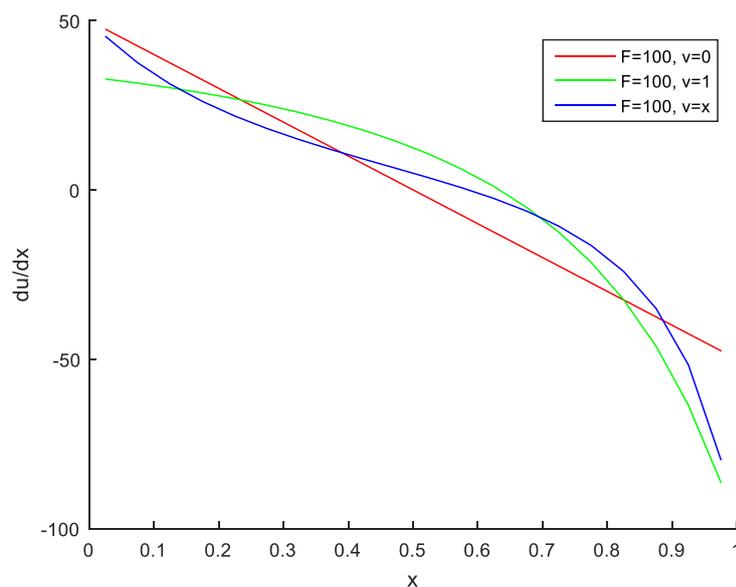
Calculando a integral da função aproximada quando os coeficientes a_i convergem, ou seja, quando o fenômeno passa do estado transiente para o estado estacionário e multiplicando esse resultado pela condutividade térmica do material, k (nessa análise adotou-se $k = 1$ J/s.m.°C), obtém-se a potência do sistema, ou ainda, a quantidade de energia por segundo no modelo proposto. Os resultados para as integrais

calculados com a Regra de Simpson foram de 8.3332967 J/s para $\vec{v} = 0$ m/s, 8.1154734 J/s para $\vec{v} = x$ m/s e 8.8018167 J/s para $\vec{v} = 1$ m/s.

Analisando esses resultados, no caso com velocidade variável ($\vec{v} = x$ m/s), constata-se o efeito significativo do termo com o produto da variável potencial pelo divergente da velocidade ($u(x,t)\nabla \cdot \vec{v}(x)$) na formulação, comportando-se como um sumidouro, dissipando energia a uma taxa maior quando comparado com os outros dois casos estudados com velocidade advectiva constante.

Calculando numericamente as derivadas das funções aproximadas, quando em estado estacionário de transferência de calor, obteve-se os seguintes resultados ilustrados pela Figura 17:

Figura 17 – Valores de du/dx ao longo do domínio no estado estacionário de transferência de calor para os casos com $F=100^\circ\text{C/s}$, $\vec{v} = 0$ m/s, $\vec{v} = 1$ m/s e $\vec{v} = x$ m/s.

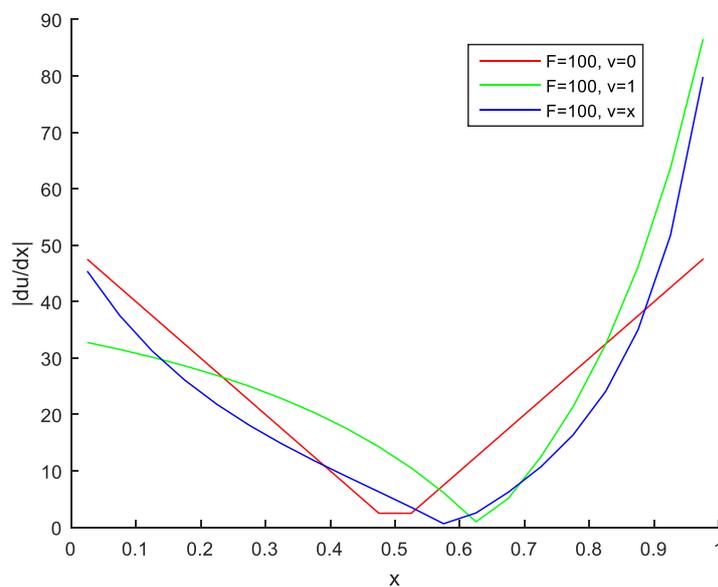


Na Figura 17 observa-se valores positivos para as derivadas até o ponto 0.5 m do domínio para o caso com $\vec{v} = 0$ m/s, 0.585 m com $\vec{v} = x$ m/s e 0.633 m com $\vec{v} = 1$ m/s. Esses resultados evidenciam o efeito da velocidade advectiva no fenômeno estudado, cujos termos de velocidade fazem com que a frente de calor perdure por mais tempo ao longo do domínio, deslocando a densidade de energia no sentido do vetor velocidade, como ilustrado na Figura 1. Como a densidade de energia é deslocada no sentido do vetor velocidade, a condição de contorno em $x = 1$ m faz com que os valores de

derivada apresentem valores negativos, como ilustrado na Figura 17 a partir de $x= 0.5$ m, 0.585 m e 0.633 m, para os casos com $\vec{v} = 0$ m/s, $\vec{v} = x$ m/s e $\vec{v} = 1$ m/s, respectivamente.

Levando em consideração a simetria das condições de contorno, na Figura 18 são ilustrados os módulos dos valores das derivadas de cada caso.

Figura 18 – Valores de temperatura ao longo do domínio no estado estacionário de transferência de calor para os casos com $F=100^\circ\text{C/s}$, $\vec{v} = 0$ m/s, $\vec{v} = 1$ m/s e $\vec{v} = x$ m/s.



Na Figura 18 é observada a simetria nos valores dos módulos das derivadas para o caso com velocidade nula, e com valores em módulo cada vez maiores ao se aproximar da extremidade em $x = 1$ m para os casos com $\vec{v} = x$ m/s e $\vec{v} = 1$ m/s, onde observa-se os maiores gradientes de temperatura.

5 CONCLUSÃO

Nesse estudo, a formulação apresentada contou com o desenvolvimento de um esquema de marcha no tempo adotando-se uma função de aproximação cujos coeficientes de ponderação apresentavam dependência temporal. O uso desse esquema, conduziu à obtenção de resultados precisos para os valores de temperatura e fluxo no

domínio do problema, quando comparados aos resultados analíticos. Ainda em relação ao uso do esquema de marcha no tempo proposto, este evita que seja necessária a utilização de outros métodos de discretização ou do cálculo de integrais de domínio.

Em relação a análise do efeito advectivo em cada caso testado, sob condições específicas, verifica-se o progressivo efeito da advecção no fenômeno difusivo-advectivo quando são adotados valores crescentes para a velocidade, como ilustrado na Figura 4.

Os exemplos tratados nesse trabalho, estão entre as aplicações de equações de movimento para um fluxo de fluido viscoso, as quais se apresentam como obstáculos formidáveis às análises clássicas, mas que nesse trabalho, mostra-se como uma formulação matemática que conduz a solução de problemas de engenharia, que feita de maneira numérica é certamente muito mais barata, segura e rápida do que fazê-los em laboratório ou planta industrial (LEMOS, 2007).

Apesar de Telles (2004) apontar como um dos aspectos negativos a forte instabilidade numérica do uso dos MCP, nesse trabalho não foi verificada tal instabilidade.

Por fim, os resultados obtidos demonstram o potencial da formulação do MCP proposta para análise de problemas de difusão-advecção em regime transiente de transferência de calor e fornecem razões e motivações para seu estudo e aplicação na busca por soluções aproximadas de problemas de engenharia.

REFERÊNCIAS

ASSAN, A. E., **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**. 2. ed. Campinas: Unicamp, 2003.

BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. Pentech Press, London, 1978.

FINLAYSON, B.A., E SCRIVEN, L.E. The Method of Weighted Residuals - A Review. **Applied Mechanics Reviews**, 19, p. 735-748, 1966.

KAZEMI, K. B. **Solving differential equations with least square and collocation methods**. Dissertation University of Nevada, Las Vegas, 2015.

LEMOS, E.M. D. **Implementação dos Métodos de Resíduos Ponderados por Quadraturas Gaussianas**. Dissertação de Mestrado em Ciências em Engenharia Química, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 2007.

LIU, G. R.; GU. Y. T. **An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming**. Springer: Netherlands, 2005.

MAI-DUY, N.; TANNER, R. I. A collocation method based on one-dimensional RBF interpolation scheme for solving PDEs, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, V. 17, Issue: 2, pp.165-186, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1108/09615530710723948>.

MELO, I. C. **Análise Numérica do Oscilador Hamônico Clássico pelo Método de Elementos Finitos**. Monografia do Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2012.

MOTA, J. P. **Solução de modelos descritos por equações diferenciais**. Requite/CQFB, Departamento de Química, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Portugal, 2010.

NAGAMINE, A.; CUMINATO, J. A. A collocation method for solving singular integro-differential equations. *Bit Numer Math*, 50, 2010. <https://doi.org/10.1007/s10543-010-0268-2>.

RUSSELL, R. D.; SHAMPINE, L. F. A collocation method for boundary value problems. *Numer. Math.* v. 19, n. 1, 1972. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01395926>.

SHARMA, A.; TANEJA, A. Variable-transformed collocation method for field propagation through waveguiding structures. *Optic Letters*, V. 17, pp 804-806, 1992.
SILVA, D. P. S., TORRI, A. J. Uma introdução ao método dos resíduos ponderados. *In: XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Rio de Janeiro, Brasil, p. 22-25, 2015.

SINGH, K. M, TANAKA, M. On exponential variable transformation based boundary element formulation for advection–diffusion problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, V.24, N. 3, p 225-235, 2000.

SNYDER L. J.; SPRIGGS T. W.; STEWART W. E. Solution of the equations of change by Galerkin's method. *AiChE Journal*, V. 10, Issue 4, pp 535-540, 1964.
SOLIMAN, M.; AL-ZEGHAYERI, Y.; AJBAR, A. A modified orthogonal collocation method for reaction diffusion problems. *Braz. J. Chem. Eng.* v. 31 n.4, São Paulo oct./dec. 2014.

TELLES, J. C. F., SANTIAGO, J. A. F., SANTOS, W. J., VELTEN, S. B. **Numerical simulation of cathodic protection system using the collocation method**. Disponível em: <https://doity.com.br/media/doity/submissoes/artigo-941c4a898467e8fee86d01146cc4f8aef4ae91b5-arquivo.pdf>. 2004. Acesso em: 27 fev. 2019.

VILLADSEN, J.V.; STEWART, W.E. Solution of Boundary Value Problems by Orthogonal Collocation. *Chemical Engineering Science*, v. 22, p. 1483-1501, 1967.